早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

The Complexity and Algorithms of Graph Drawing

グラフ描画の計算量とアルゴリズム

申 請 者
土田 賢省
Kensei Tsuchida

平成 6 年 2 月

情報の図（木などのグラフ）による表現は情報の視覚化のためのアプローチとして広く用いられており，その有用性も認められている。図が情報伝達の手段として有効に機能するためには，読み手が送り手の意図を素早くかつ正確に認識できるような「わかりやすさ」が要請される。さらに，図をコンピュータ上で実現しようとするとグラフ（図）を自動生成する効率のよいアルゴリズムを開発することが必要となる。

コンピュータ・サイエンスにおける以上のような状況から，様々なグラフを対象として描画に関する研究が盛んに行われている。その中で最も基本となる木に対する描画の研究に関しては，２分木について1970年頃からKnuthなど多くの研究者により様々なアルゴリズムが提案されている。このような経緯の中で1983年にSupowitとReingoldが初めて，２分木の描画問題を計算論的議論が可能となるように定式化し，ある美的条件の下で幅が最小となるような描画問題がNP完全（一般に，多項式時間で解けないと思われているクラス）であることを示した。しかし，彼らの提案した２分木の美的条件をそのまま図式プログラムやシステム構成図などの一般の木構造の図に適用しようとすると不都合が生じることがあり，他の美的条件を用意する必要が生まれる。

以上のことを背景として，本研究は行われた。本論文では，グラフ描画の最も基本となる一般の木構造を対象として，わかりやすさのための美的条件を導入し，その美的条件と計算の難しさのクラスを理論的に解明し，さらにいくつかの美的条件の下で幅最小となる描画を実現する効率的なアルゴリズムを提案する。本論文は全９章から成り立っており，各章を要約すると以下のようになる。

第１章は序論であり，グラフ描画に関する研究の歴史的経緯を述べ，本研究の背景と位置づけを明らかにする。

第２章では，まず木の描画に対して厳密な議論が可能となるように形式的な定義を与える。次に，一般の木 T の配置 $\pi(T)$ に対する基本的な美的条件を以下のように導入する。

[条件Ｂ１]　レベル i のノード p に対して，その y 座標 $\pi_y(p) = i$.

[条件Ｂ２]　ノード p が k 個の子供 $p_1, ..., p_k$ をもつとき，各 i $(1 \leqq i \leqq k)$ に対して，$\mathrm{Index}(p_i) = i$ とする。このとき，$\pi_x(p) = \pi_x(p_m)$, $m = \lceil (k+1)/2 \rceil$.

[条件Ｂ３]　ノード p が k 個の子供 $p_1, ..., p_k$ をもつとき，$\pi_x(p_{i+1}) > \pi_x(p_i)$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$.

[条件Ｂ４]　ノード p, q が同じレベルで p が k 個の子供 $p_1, ..., p_k$ を q が n 個の子供 $q_1, ..., q_n$ をもち，さらに $\pi_x(p) < \pi_x(q)$ ならば，$\pi_x(p_k) < \pi_x(q_1)$.

[条件Ｂ５]　T_1 と T_2 が同型な部分木ならば，T_1 と T_2 は平行移動に関して合同に写される.

[条件Ｂ６]　ノード p, q が同じレベルならば，$|\pi_x(p) - \pi_x(q)| \geqq 1$.

[条件Ｂ７]　任意の隣り合う（互いの根が兄弟である）部分木 T_1, T_2 に対して，T_1 が T_2 の左にあるとき，すなわち Index(T_2の根) = Index(T_1の根) + 1 のとき，T_1 の最右端のノードの x 座標は T_2 の根の x 座標より小さく，かつ T_2 の最左端のノードの x 座標は T_1 の根の x 座標より大きい，正確には，

$\max\{\pi_x(t); t \in \{T_1のノード\}\} < \pi_x(T_2の根)$ かつ

$\pi_x(T_1の根) < \min\{\pi_x(s); s \in \{T_2のノード\}\}$.

[条件Ｂ＃]　互いに兄弟である k 個のノード $p_1, ..., p_k$ に対して，$\pi_x(p_{j+2}) - \pi_x(p_{j+1}) = \pi_x(p_{j+1}) - \pi_x(p_j)$ $(1 \leqq j \leqq k-2)$.

[条件Ｂ８（k）]　隣り合う部分木は x 座標で k 個以上重ならない，正確には，自然数 $k \geqq 0$ に対して，配置 π が $\mathrm{Intersect}(T, \pi) \leqq k$ を満たす.

与えられた木をこれらの条件により描画することが可能となる。さらに，本章ではSupowitとReingoldの２分木に対する条件との比較についても述べる。

第３章では，第２章で導入した基本的条件を組み合わせたある美的条件の下での描画問題が難しいことを示す。具体的には次の定理を証明する。

[定理　1]　木 T と正整数 W が与えられたとき，美的制約 $C = B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge B4 \wedge B5 \wedge B6$ を満たしかつ $\mathrm{width}(\pi(T)) \leqq W$ となる配置 π が存在するかどうかの判定問題はNP完全である（$\mathrm{width}(\pi(T))$ は幅の長さ）。

[定理　2]　木 T と正整数 W が与えられたとき，美的制約 $C\# = C \wedge B\#$ を満たしかつ $\mathrm{width}(\pi(T)) \leqq W$ となる配置 π が存在するかどうかの判定問題はNP完全である。

この結果はSupowitとReingoldの結果以来，初めて計算量的に描画問題の限界を示す結果である。さらに，彼らの提出した未解決問題に対する解にもなっている。

第４章では，実用的な計算時間で描画可能ないくつかの美的条件について考察し，計算時間 $O(n)$ と $O(n^2)$ のアルゴリズムを提案する。それらのアルゴリズムは，それぞれ美的条件 $C(0) = C \wedge B7 \wedge B8(0)$ と $C(k) = C \wedge B7 \wedge B8(k)$ の下で幅最小の描画を実現することが示され，次の定理を得る。

[定理　3]　美的制約 $C(0)$ の下で，木の幅を最小にする時間計算量 $O(n)$ の描画アルゴリズムが存在する。

[定理　4]　美的制約 $C(k)$ の下で，木の幅を最小にする時間計算量 $O(n^2)$ の描画アルゴリズムが存在する。

木構造の描画アルゴリズムは本研究以外にも多くの近似アルゴリズムが提案されているが，本研究で初めて幅に関して最適なアルゴリズムと美的条件の組を得ることができた。

第5章では，木のノードが様々な大きさの矩形からなる木構造図を対象として，描画に関する美的条件を導入する。この形式は，例えばプログラム図などのように実際の応用でよく利用される木構造の形態を反映したものである。木構造図は木の場合とは違い，辺と辺との交差だけでなく，（ある大きさをもつ矩形の）ノード同士あるいはノードと辺の交差などを考慮する必要があり，いくつか複雑な点が生じる。本章では，このような木の場合とは異なる美的条件の性質についても論じる。

第6章では，第5章で導入した美的条件を組み合わせたある条件の下で，木構造図の幅最小の描画問題がNP完全であることを証明する。

第7章では，第5章で導入した美的条件の中から実用的な計算時間で描画可能な条件を選定し，計算時間 $O(n)$ と $O(n^2)$ のアルゴリズムを提案する。さらに，それらのアルゴリズムが各美的条件の下で幅最小の木構造図の描画を実現することを示す。

第8章では，描画問題の実際的側面から美的条件と近似アルゴリズムの関係について，さらに本研究で採用した美的条件の妥当性について述べる。前者に関しては，（$P \neq NP$を仮定すると）ある美的条件の下では一定の誤差以内の多項式時間の近似アルゴリズムさえ存在しないことが言える。

第9章は結論であり，本研究で得られた成果を総括すると共に，今後の課題についても述べる。